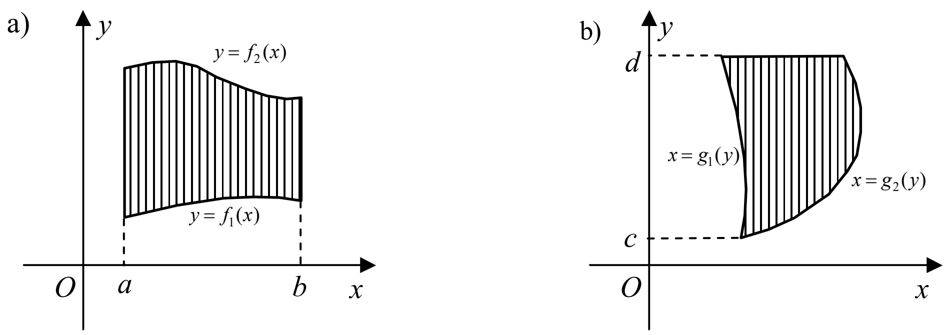
Całka podwójna - metody obliczania

Całka podwójna w obszarze normalnym

Definicja. Obszar domknięty D nazywamy *obszarem normalnym względem osi* Ox (rys. 8a), jeżeli można zapisać go w postaci:

$$D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

gdzie funkcje f_1 i f_2 są ciągłe w przedziale $\langle a,b \rangle$ oraz $f_1(x) < f_2(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$.



Rys. 8. Obszar normalny względem: a) osi Ox, b) osi Oy

Definicja. Obszar domknięty D nazywamy *obszarem normalnym względem osi* Oy (rys. 8b), jeżeli można zapisać go w postaci:

$$D = \{(x,y):\ c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\},$$

gdzie funkcje g_1 i g_2 są ciągłe w przedziale $\langle c,d \rangle$ oraz $g_1(y) < g_2(y)$ dla każdego $y \in (c,d)$.

Definicja. Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi Ox lub Oy) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy *obszarem regularnym*.

Twierdzenie (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane).

- Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w obszarze D, który jest normalny względem osi Ox, czyli:

  $$D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

  to

  (1) $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

- Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w obszarze D, który jest normalny względem osi Oy, czyli:

  $$D = \{(x,y):\ c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\},$$

  to

  (2) $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Uwaga. Całki znajdujące się we wzorze (1) i (2) po prawej stronie znaku równości nazywamy *całkami iterowanymi.* Często zapisuje się je w nieco odmiennej postaci, a mianowicie:

$$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \quad \text{zamiast} \quad \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

oraz

$$\int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \quad \text{zamiast} \quad \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right] dy .$$

Ze wzoru (1) wynika, że aby obliczyć całkę podwójną po obszarze normalnym względem osi Ox, to należy wykonać dwa całkowania: pierwsze całkowanie (wewnętrzne) – względem zmiennej y (w tym przypadku zmienną x traktujemy jako stałą) oraz drugie (zewnętrzne) – względem zmiennej x. Analogicznie postępujemy przy obliczaniu całki podwójnej po obszarze normalnym względem osi Oy.

W szczególnym przypadku, gdy obszar D jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, to przy obliczaniu całki podwójnej możemy posłużyć się następującym twierdzeniem:

Twierdzenie (o całce podwójnej po prostokącie).

Jeżeli obszar całkowania D jest prostokątem określonym w następujący sposób:

$$D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\},$$

to wówczas:

1° $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy ,$

2° jeżeli funkcja $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, gdzie funkcje g i h są ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a,b]$ i $[c,d]$, to:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy .$$

Na podstawie powyższego twierdzenia możemy stwierdzić, że w przypadku, gdy obszar całkowania jest prostokątem, to kolejność całkowania nie ma znaczenia (punkt 1°), a dodatkowo, gdy funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej (tzw. funkcja o rozdzielonych zmiennych), to całkę podwójną z takiej funkcji można obliczyć jako iloczyn dwóch całek oznaczonych (punkt 2°).

Przykład. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \sqrt{x}\, ydxdy ,$$

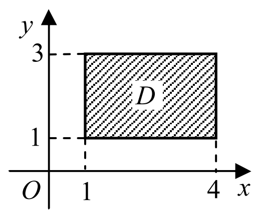
po prostokącie (rys. 9)

$$D = \{(x,y): 1 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3\}.$$

Rozwiązanie.

Aby zilustrować oba punkty twierdzenia 1.4, daną całkę obliczymy dwiema metodami:

Metoda 1. Zastosujemy wzór zawarty w pierwszym punkcie powyższego twierdzenia przy czym wewnętrzne całkowanie wykonamy względem zmiennej y traktując zmienną x jako stałą:



Rys. 9

$$\iint_D \sqrt{x}\, ydxdy = \int_1^4 \left(\int_1^3 \sqrt{x}\, y\, dy \right) dx = \int_1^4 \left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\, y^2 \right]_1^3 dx = \int_1^4 \left(\frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx =$$

$$= \int_1^4 4\sqrt{x}dx = 4\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = 4\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^4 = \frac{8}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}\right) = \frac{8}{3}(8-1) = \frac{56}{3}$$

Metoda 2. Ponieważ funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej, to możemy zastosować również drugi wzór z podanego twierdzenia:

$$\iint_D \sqrt{x}\,ydxdy = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx\cdot\int_1^3 ydy = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4\cdot\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^3 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)\cdot 4 = \frac{56}{3}$$

Przykład. Obliczyć całki podwójne po obszarach D ograniczonych podanymi krzywymi:

a) $\iint_D x^2 ydxdy$; D: $y = x^2$, $y = 1$,

b) $\iint_D 12ydxdy$; D: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x + y = 2$,

c) $\iint_D \left(x^2 - 2y\right)dxdy$: D: $y = \dfrac{4}{x}$, $y = x$, $x = 1$.

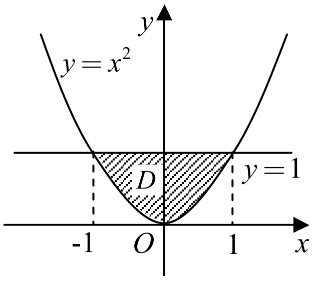
Rozwiązanie.

a) Rysujemy najpierw obszar D (rys. 10) i stwierdzamy, że jest to obszar normalny względem obu osi. Potraktujmy go zatem, jako normalny względem osi *Ox*. Aby zapisać odpowiednie nierówności rozwiązujemy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$$

i wyznaczamy punkty przecięcia danych krzywych: $A_1(-1,1)$, $A_2(1,1)$. Obszar D możemy zatem zapisać w postaci:

$$D = \{(x,y)\colon -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}.$$



Rys. 10

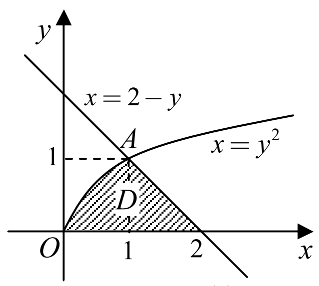
W celu obliczenia danej całki podwójnej korzystamy ze wzoru (1) i zamieniamy ją na całki iterowane. Przy ich obliczaniu pamiętamy, że stosując wzór Newtona-Leibniza, granice całkowania podstawiamy w miejsce zmiennej, względem której dane całkowanie było przeprowadzone. Otrzymujemy:

$$\iint_D x^2 ydxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} x^2 y\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x^2}^{1}dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^6\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{14}x^7\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{14}\right) - \left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{14}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{7} = \frac{7}{21}-\frac{3}{21} = \frac{4}{21}.$$

b) Sporządzamy najpierw rysunek obszaru D (rys. 11). Widzimy, że obszar D jest normalny względem obu osi. Ponieważ górny brzeg tego obszaru składa się z fragmentów wykresów dwóch funkcji, to traktując go jako normalny względem osi *Ox*, musielibyśmy przy obliczaniu całki podwójnej rozbić go na dwa podobszary (jeden na lewo, a drugi na prawo od prostej $x = 1$) i skorzystać z twierdzenia o addytywności całki podwójnej względem obszaru całkowania.

Wygodniej będzie zapisać ten obszar jako normalny względem osi *Oy*. W tym celu z równań $y = \sqrt{x}$ i $x + y = 2$ wyznaczamy zmienną x i otrzymujemy odpowiednio: $x = y^2$ (dla $y \ge 0$) oraz $x = 2 - y$. Rozwiązując układ równań:



Rys. 11

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

otrzymamy punkt przecięcia krzywych: $A(1,1)$. Patrząc na obszar D od strony osi Oy możemy zapisać go w postaci:

$$D = \{(x, y) : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 2 - y\}.$$

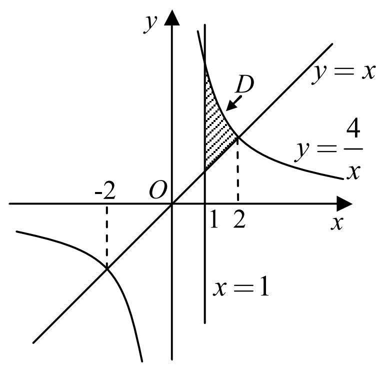
Stosując wzór (2) obliczamy:

$$\iint_D 12y\,dxdy = 12\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} y\,dx \right) dy = 12\int_0^1 [xy]_{y^2}^{2-y}\,dy = 12\int_0^1 \left[(2-y)y - y^2 y\right] dy =$$

$$= 12\int_0^1 \left(2y - y^2 - y^3\right) dy = 12\left[y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 12\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 5.$$

c) Rysujemy obszar D (rys. 12). Widzimy, że w tym przykładzie wygodniej jest potraktować zakreślony obszar jako normalny względem osi Ox (chociaż jest on również normalny względem osi Oy). Aby określić przedział zmienności współrzędnej x każdego punktu tego obszaru, wyznaczamy punkty przecięcia wykresów funkcji: $y = \frac{4}{x}$ i $y = x$. W tym celu rozwiązujemy (wystarczy względem niewiadomej x) układ równań:

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ lub } x = 2.$$



Rys. 12

Obszar D można zatem zapisać w postaci:

$$D = \left\{(x, y) : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le \frac{4}{x}\right\}.$$

Stosując wzór (1) obliczamy daną całkę podwójną:

$$\iint_D \left(x^2 - 2y\right) dxdy = \int_1^2 \left[\int_x^{\frac{4}{x}} \left(x^2 - 2y\right) dy \right] dx = \int_1^2 \left[x^2 y - y^2\right]_x^{\frac{4}{x}} dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\left(x^2 \cdot \frac{4}{x} - \left(\frac{4}{x}\right)^2 \right) - \left(x^2 \cdot x - x^2\right) \right] dx = \int_1^2 \left(4x - \frac{16}{x^2} - x^3 + x^2 \right) dx =$$

$$= \left[2x^2 + \frac{16}{x} - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \left(8 + 8 - 4 + \frac{8}{3} \right) - \left(2 + 16 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= -6 + \frac{7}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{72}{12} + \frac{28}{12} + \frac{3}{12} = -\frac{41}{12}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć całki podwójne po podanych prostokątach:

1. $\iint\limits_D xy^3 dxdy$; $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$,

2. $\iint\limits_D (x + 3y) dxdy$; $D = \{(x, y):\ -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$,

3. $\iint\limits_D (x - y)^2 dxdy$; $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$,

4. $\iint\limits_D \sin x \cos y dxdy$; $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le \pi,\ -\pi \le y \le 0\}$,

5. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x-y} dxdy$; $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$,

6. $\iint\limits_D r^2 \sin^2 \varphi drd\varphi$; $D = \{(r, \varphi):\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.

Obliczyć całki podwójne po obszarach ograniczonych podanymi krzywymi:

7. $\iint\limits_D xydxdy$; $D:\ y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$,

8. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$; $D:\ x = 0,\ y = 1 - \dfrac{x}{2},\ y = 2 - x$,

9. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$; $D:\ y = 2x,\ y = x,\ y = 4$,

10. $\iint\limits_D (2x + 1) dxdy$; $D:\ y = \dfrac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 4$,

11. $\iint\limits_D xy^2 dxdy$; $D:\ y = x^2$, $x + y = 2$,

12. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$; $D:\ y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 2$,

13. $\iint\limits_D 12ydxdy$; $D:\ y^2 = x$, $x - y - 2 = 0$,

14. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} dxdy$; $D:\ x = y^2,\ x = 0,\ y = 1$,

15. $\iint\limits_D 2y \sin x dxdy$; $D:\ y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$.

Opracowanie:

dr Igor Kierkosz

dr hab. Volodymyr Sushch